**Tema 2: Combinatoria**

**Principio de adición (suma)**

* Sea A un conjunto, |A| es el **cardinal** de A, el número de elementos del conjunto A.
* **Principio de adición:** Sean A y B dos conjuntos disjuntos (A^B=~~O~~), **|AUB| = |A|+|B|**
* Generalizado: Sean A1,A2,...An conjuntos disjuntos dos a dos (Ai^Aj=~~O~~, si i≠j),

**|A1UA2…UAn| = |A1| + |A2| + … + |An|**

**Principio de la diferencia**

* Siendo U un universo, A un conjunto dentro del universo y ¬A el complementario de A.
* **Principio de la diferencia: |A| = |U| - |¬A|**

**Principio de la multiplicación**

* Sean A y B dos conjuntos finitos:
* **Principio de la multiplicación: |AxB| = |A| \* |B|** (siendo AxB el producto cartesiano)
* Ejemplo: Siendo A = {A1, A2, A3} y B= {B1, B2},

AxB={(A1, B1), (A1, B2), (A2, B1), (A2, B2), (A3, B1), (A3, B2)}

* Generalizado: Sean A1,A2,...An conjuntos, |A1 x A2 x … x An| = |A1| \* |A2| \* … |An|

**Principio de la biyección**

* Sean A y B conjuntos finitos y F una **aplicación biyectiva** entre estos conjuntos (f.A—>B), **|A| = |B|**

**Principio del palomar (casillas)**

* Si tenemos n+1 objetos distrubuídos en n casillas, entonces al menos 2 objetos tienen que estar en la misma casilla.
* Generalizado: si se quieren colocar n objetos en k cajas, alguna caja contendrá **al menos Γㄱ** (función techo)
* **Ejemplos:**
  + 100 estudiantes que cumplen años en uno de los 12 meses. Entonces, al menos Γ100/12ㄱ= 9 estudiantes comparten mes de cumpleaños.
  + En un club formado por n matrimonios, el número mínimo de asistentes a una reunión para garantizar que dos asistentes están casados es n+1.
  + Si la media de 4 números es mayor de 6, alguno de los números es mayor de 6.
  + Si queremos pintar 64 bicicletas con 7 colores, al menos (64/7)=10 tendrán el mismo color.

**Variaciones [V(n,r)]**

* Sea A = {a1, … an} un conjunto finito de n elementos y r un número natural r>=0 pero r<=n. Una **variación** de orden r de los n elementos de A es una selección ordenada (lista) de r elementos distintos de A.
  + V(n,r) es el número de aplicaciones inyectivas entre los elementos de n y r.
* El número de aplicaciones posibles es n \* (n-1) \* (n-2) … \* n-(r-1), es decir, **V(n,r) = n! / (n-r)!**
  + - Cuando r=n, existen n! aplicaciones posibles. En este caso, las aplicaciones son biyectivas y se denominan ‘permutaciones de orden n’.

**Variaciones con repetición [VR(n,r)]**

* Dado un conjunto A = {a1, … an} y r un número entero cualquiera, una **variación** de orden r ordenada con repetición de n elementos de A es una lista o selección ordenada no necesariamente distinta de A. Se demonima **VR(n,r)**
  + Es lo mismo que las aplicaciones totales de r → n.
  + El número de aplicaciones posibles es **nr**. Si tenemos n elementos y queremos formar r conjuntos, existen n1\*n2…\*nr posibilidades.

**Permutaciones**

* Sea A{*a1*, *a2*, *…* ,*an*} un conjunto finito de *n* elementos. Una **permutación** de A es una aplicación biyectiva de A en A.
* Son las posibles reordenaciones de los n elementos de A.
* El nº de permutaciones de un conjunto de n elementos es **n!**.

**Permutaciones con repetición**

* Tomemos la palabra coser. Con sus letras se pueden formar P(5) = 5! palabras.
* Sin embargo, con la palabra casar hay que considerar como el mismo caso las posibilidades que intercambian las **a**. Entonces, hay **5! / 2!** palabras.
* Tomando la palabra casaca, donde la c se repite 2 veces y la a 3, existen 6! / 2! / 3! palabras. Sería el caso PR(6,3,2,1).
* Para un conjunto de r elemtentos A={ai} donde cada elemento se repite ni veces, el número de permutaciones con repetición de n objetos es **.**
  + Este resultado se conoce como el coeficiente multinomial.
* Sirve para calcular cadenas de bits con número determinado de 1s. Por ejemplo, 5 bits con 3 1s es lo mismo que PR(5;3,2) = (5!)/(3!2!) = 5|3 = 5|2

**Permutaciones circulares**

* Si en lugar de estar en fila, los elementos a ordenar están **en círculo**, consideramos que lo único que importa son los dos elementos adyacentes a cada elemento, sin importar desde donde se empieza a contar.
* Por ejemplo, estando 4 personas A,B,C,D sentadas en círculo, consideramos que ‘ABCD’ es la misma cadena que ‘BCDA’, ‘CDAB’ y ‘DABC’.
* Entonces el número de **permutaciones circulares** de n elementos es **n!/n,** o lo que es lo mismo, **(n-1)!**.**º**

**Combinaciones sin repetición [C(n,r)]**

* **Definición:** Sea A{*a1*, *a2*, *…* ,*an*} un conjunto finito de *n* elementos distintos, siendo *r* ≤ *n*, una **combinación** de orden *r* de los *n* elementos del conjunto A, es una selección no ordenada de *r* elementos distintos. Es decir, no importa el orden a la hora de tomarlos.
* **C(n,r) = V(n,r) / r!**
* Es equivalente a contar los subconjuntos de n de orden r.
* **Ejemplo 1:** Cuántas comisiones de cuatro personas puedes formar con {1, 2, …, 9}?
  + Si tomamos el mismo ejemplo pero con selecciones ordenadas, *V*(9,4) =
    - Dividimos entre r! debido a que el orden es irrelevante, y r! es el número de permutaciones de un conjunto de orden n.
    - **C(n,r) =** Coeficiente Binomial
* Se cumple que **C(n,r) = C(n, n-r)**. Por ejemplo, teniendo una cadena de 1s y 0s, es lo mismo contar las cadenas que tienen r unos y las que tienen n-r 0s.

**Combinaciones con repetición [CR(n,r)]**

* **Definición:** Sea A{*a1*, *a2*, *…* ,*an*} un conjunto finito de *n* elementos *r*, siendo *r* un natural cualquiera, una **combinación con repetición** de orden *r* de los *n* elementos de A es una selección no ordenada de *r* elementos no necesariamente distintos en A.
* ***CR* (*n*,*r*) = (n + r - 1 | n-1) = (n + r - 1 | r)**
  + Nótese que (n|r) = (n|n-r) → (n+r-1|n-1) = (n+r-1|n+r-1 - (n-1)) = (n+r-1|r)
* Se cumple que CR(n,r) = el nº de **soluciones enteras** de la ecuación **x1+...+xn = r**
  + Si se indica el valor mínimo de xi, podemos restar este valor a todas las xi y también a n para resolver el ejercicio.
* **Ejemplo 1:** ¿Cuántas combinaciones de 10 helados podemos hacer con 4 sabores?
  + Tenemos 4 sabores: fresa (F), vainilla (V), chocolate (C) y nata (N)
  + Si los distribuímos así, el problema es equivalente a calcular cuántas cadenas de 13 bits se pueden hacer con 3 ceros, y a su vez equivalente a calcular las soluciones enteras de la ecuación x1+ x2 + x3 + x4 = 10

**Resumen de selecciones de elementos de un conjunto**

| **r objetos de n** | **Ordenados**  **(Variaciones)** | **No ordenados**  **(Combinaciones)** |
| --- | --- | --- |
| **Sin repetición** |  |  |
| **Con repetición** |  |  |

**Distribución de r objetos diferentes en n cajas diferentes**

* Tenemos r objetos diferentes a distribuír en n cajas. El número de formas de distribuírlas es **VR(n, r) = n^r**.
  + Esto es porque, si no se dá ninguna condición, el primer objeto puede ir en cualquier caja, al igual que el segundo y todos los siguientes.
* Es lo mismo que las aplicaciones totales de r → n.
* Si queremos que ninguna caja esté vacía, debemos calcular las aplicaciones sobreyectivas. Para esto es necesario que r>=n.
  + No es válido el método de restar r-n.
* Si queremos máximo 1 objeto por caja, debemos calcular las aplicaciones inyectivas. Para esto es necesario que n>=r. Existen posibilidades.

**Distribución de r objetos iguales en n cajas diferentes**

* El número de posibilidades (siendo x1, x2, … xn las cajas) son **CR(n,r) = (n+r-1)**
* Si queremos que ninguna caja esté vacía, es lo mismo que distribuír n-r objetos iguales en n cajas diferentes. El número de posibilidades es CR(n, r-n). Es necesario que r>=n.
  + Esto es porque damos por hecho que en cada caja hay 1 objeto.
* Si queremos máximo 1 objeto por caja, es equivalente a calcular cadenas de **n** bits con **r** 1s. Es decir, C(n,r) = .
  + Ejemplo: A = {a,e,i,o,u}. ¿Cuántos subconjuntos hay que tienen 3 elementos?
    - Es lo mismo que calcular el número de cadenas de 5 bits con 3 1s.

**Resumen**

| **r objetos, n cajas** | **Ninguna restricción** | **Ninguna caja vacía (r>=n)** | **Máximo 1 por caja (r<=n)** |
| --- | --- | --- | --- |
| **Objetos diferentes** | VR(n,r) = n^r Aplicaciones de r→n | Ap. sobreyectivas r→n | Ap. inyectivas r→n |
| **Objetos iguales** | CR(n,r) = (n+r-1|r) | CR(n,r-n) |  |

**Teorema del binomio de Newton[[1]](#footnote-0)**

* (a+b)n = =
* Demostración:
  + Sea (a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b). Los términos que aparecen son, en realidad, las combinaciones de términos que se pueden tomar. Por ejemplo, a^2\*b toma el primero de los dos primeros términos y el último del tercero, es decir, aab.
  + Entonces, el número de veces que aparece cada término a^2\*b es el número de combinaciones que se puede realizar con 2a y 1b, es decir, (3|2) o (3|1). Es por esto que aparece (n|k) en el teorema.
* Consecuencia: si a=1 y b=1, nos queda:
  + 2^n = = \*1 =
  + Es decir, la suma del número de combinaciones (subconjuntos) que se pueden realizar con un conjunto de n elementos es 2^n.
* **Consecuencia 2:** si a=1 y b=-1:
  + 0 =
    - = 1, será 1 o -1 según k sea par o impar
    - 0 = = (n|0) - (n|1) + (n|2) - (n|3) … (n|n-1)\*(-1)n-1 + (n|n)\*(-1)n
    - Los términos con k par son positivos, con k impar son negativos. Su resta es 0.
    - Es decir, los subconjuntos con nº de elementos par son los mismos que los que tienen nº de elementos impar.

**Teorema de Leibniz (Multinomio de Leibniz)**

* Sea x1, x2, …, xk variables y n un número natural.
* (x1 + x2 + … + xk)n =
  + Donde n1, n2… también son números naturales
* Se cumple que (x1+x2)^n = es la misma función que la del binomio de Newton.

**Identidad de Pascal / Tartaglia**

* (n|k) = (n-1 | k) + (n-1|k-1)
* Demostración mediante combinatoria:
  + (n|k) son los subconjuntos de A con k elementos
  + Sea A = {a1, a2, …, an}
  + Un subconjunto dado de A puede contener a an o no contenerlo.
    - Número de subconjuntos que contienen an: (n-1|k-1)
    - Número de subconjuntos que no contienen an: (n-1|k)
  + Entonces, el total es la suma.

**Triángulo de Pascal**

|  |  |  |  | (0|0) |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | (1|0) |  | (1|1) |  |  |  |
|  |  | (2|0) |  | (2|1) |  | (2|2) |  |  |
|  | (3|0) |  | (3|1) |  | (3|2) |  | (3|3) |  |
| (4|0) |  | (4|1) |  | (4|2) |  | (4|3) |  | (4|4) |

* Cada término es igual a la suma de los dos superiores cercanos
* La suma de los números de la fila n es 2^n

**Coeficiente binomial y multinomial**

* Dado un conjunto finito de n elementos, |A| = n, **|P(A)| = 2^n**. Demostración:
* P(A) son los subconjuntos de A.
* Ejemplo: sea A = {a,e,i,o,u}. |A| = 5.
  + Los subconjuntos pueden tener 0,1,2,3,4 o 5 elementos.
  + Con 0 elementos existe 1 subconjunto (00000)
  + Con 1 elementos existen 5 subconjuntos (5|1)
  + Con 2 elementos existen 5|2 subconjuntos
  + Con k elementos existen 5|k subconjuntos
  + En total, existen (5|0)+(5|1)+(5|2)+(5|3)+(5|4)+(5|5) == (1+1)^5
  + Esta igualdad se demuestra mediante el **teorema del binomio** (ver arriba)

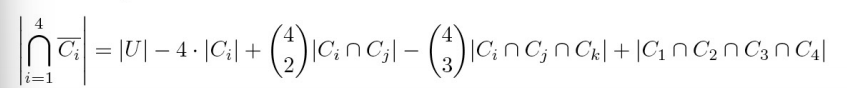
**Fórmula de Vandermonde**

* Demostración combinatoria:
  + Sea un comité de m hombres y n mujeres. Calcular los posibles subcomités de p miembros que se pueden formar:
  + ((m+n)|p) sería el número de combinaciones sin repetición tomando p elementos de un conjunto de m+n elementos.
  + Además, sería también la suma de todos los valores posibles de k para la serie de subcomités que cuentan con k hombres y r − k mujeres.

**Principio de inclusión-exclusión[[2]](#footnote-1)**

* Ya se ha visto que dados dos conjuntos A y B, **|A U B| = |A| + |B| - |A⋂B|.**
* El **principio de inclusión-exclusión** es una manera sistemática de obtener la solución a problemas que nos piden calcular el nº de elementos que cumplen una de varias condiciones (más de 1), teniendo en cuenta que no debemos contar varias veces los elementos que cumplen más de una.
* Veamos el siguiente ejemplo: calcular el nº de números entre 1 y 100 que son pares, múltiplos de 3 o múltiplos de 5.
  + Definamos los conjuntos necesarios: U={1,...,100}, A = { n€U | n par }, B = { n€U | n múltiplo de 3}, C = { n€U | n múltiplo de 5}
  + Hay 50 números pares, 33 múltiplos de 3 y 20 múltiplos de 5. Además, hay 16 números pares múltiplos de 3, 10 números pares múltiplos de 5 y 6 números múltiplos de 3 y de 5.
  + Además, hay 3 números que cumplen las 3 propiedades.
  + El nº de números que cumplen alguna de las propiedades es: 50+33+20 - (16+10+6) + 3. Es necesario sumar el 3 al final porque estos números habrían sido contados 3 veces y descontados otras 3 veces.
* Veamos ahora un caso genérico, con un universo finito U y n propiedades p1,...,pn. Sea Ci el conjunto formado por los elementos que cumplen la propiedad pi. Por ejemplo, C1,2 será el conjunto de elementos que cumplen las propiedades 1 y 2.
* denotará el subconjunto de U formado por los elementos que cumplen al menos una de las n propiedades. Para contar sus elementos haremos lo siguiente:
  + Sumamoslos elementos que cumplen alguna propiedad: |C1| + … + |Cn|
  + Restamos los que cumplen al menos 2 propiedades: -|C1,2| - … - |Cn-1, n|
  + Sumamos los que cumplen al menos 3 propiedades: +|C1,2,3| +...+ |Cn-2, n-1, n|
  + Así sucesivamente hasta sumar/restar, según coincida, los elementos que tienen todas las propiedades.
* Entonces, obtenemos la fórmula del **principio de inclusión-exclusión**:
* || =
  + El se puede leer como las combinaciones posibles de i y j hasta n, sin repetir. Ejemplo: (1,2), (1,3) (2,3). No se puede repetir porque no tiene sentido hacer la intersección entre C1 y C1. C1 ya fue contado antes.
* Demostración[[3]](#footnote-2): Tomamos cualquier elemento x € U. Veamos que se cuenta tantas veces a la izquierda de la igualdad como a la derecha. Distinguimos dos casos:
  + Si x no satisface ninguna propiedad pi, no pertenecerá a ninguna de las intersecciones. Entonces, se contará 0 veces en ambos lados.
  + Si x satisface m de las n propiedades, pertenece a , y se contará 1 vez en este lado de la ecuación.
    - En la parte derecha, contribuye con m en el sumando , un 1 por cada Ci a la que pertenece.
    - Para cada k entre 1 y m, x pertenece a (m|k) intersecciones del tipo , las posibles intersecciones de orden k de m conjuntos.
      * Para valores de k mayores que m, x no pertenece a ninguna de las intersecciones.
    - Entonces, x contribuye con
    - = = 1.
      * Esto es debido a que = 0, resuelto por el binomio de Newton (con a=-1, b=1)

**Cálculo de aplicaciones sobreyectivas[[4]](#footnote-3)**

* Ejemplo: Repartir 6 bolas numeradas en 4 cajas distintas sin que ninguna caja quede vacía.
  + Sean B={b1, …, b6} las bolas y C = {C1, … C4} las cajas. Asignar cada bola a una caja sin que ninguna caja quede vacía es definir la aplicación **sobreyectiva** de B en C.
  + Sea U el conjunto de todas las formas de repartir las bolas sin criterio. |U|=46
  + Definimos Ci como el subconjunto de U formado por las combinaciones donde la caja ci queda vacía. Entonces, queremos calcular el cardinal (C1’^C2’^C3’^C4’). Según De Morgan, es |U| - (|C1|+|C2|+|C3|+|C4|).
  + Aplicamos el principio de inclusión-exclusión:
  + 
    - |Ci| = 36, pues definimos que para Ci la i-ésima caja queda vacía. Entonces, sólo quedan repartir 6 objetos en 3 cajas.
    - De la misma forma, |Ci^Cj| = 26, |Ci^Cj^Ck| = 1, y |Ci^Cj^Ck^Ct| = 0.
* En conclusión, el número de aplicaciones sobreyectivas de un conjunto con n elementos a uno de k elementos (es decir, el número de formas de repartir n objetos en k cajas sin que ninguna caja quede vacía) es:

.

1. Tema 4 do libro de texto. [↑](#footnote-ref-0)
2. Tema 5 no libro de texto. [↑](#footnote-ref-1)
3. dudo que a pregunte [↑](#footnote-ref-2)
4. nunca entrou [↑](#footnote-ref-3)